

GF-0102 ANÁLISIS ESPACIAL
I SEMESTRE 2001

CÁLCULO DE DERIVADAS ESPACIALES

INTRODUCCIÓN

Ya sea con modelos numéricos en forma de grilla regular, en facetas triangulares o en trapezoides, a menudo se desea obtener cantidades derivadas a partir de tales MNA. Esta operación, que no forma parte del procedimiento de creación de la matriz espacial, se discute e ilustra mediante un ejemplo.

DISCUSIÓN DEL CONCEPTO

El cálculo de derivadas espaciales no es otra cosa que la aplicación del cálculo diferencial a las variables que tienen una distribución continua sobre el terreno. *“Dos enfoques matemáticos diferentes pueden ser utilizados en la aplicación del cálculo diferencial a las distribuciones espaciales. Un enfoque numérico puede ser utilizado para aproximar el valor de la tasa de cambio en una localización particular a partir de datos dispuestos sobre una grilla regular (este es llamado el método de las diferencias finitas aplicado a los MNA en cuadrícula regular). Alternativamente, un enfoque analítico puede ser utilizado para diferenciar funciones continuas de superficie (por ejemplo, superficies de tendencia polinomiales) para obtener nuevas ecuaciones que describen la tasa de cambio de la variable dependiente”* (Eyton, 1991:87).

El cálculo de la pendiente media $\Delta h/\Delta x$ (amplitud del desplazamiento vertical / amplitud del desplazamiento horizontal) entre dos puntos es un ejemplo de diferenciación utilizando el cálculo de diferencias finitas. La determinación de una ecuación para describir el plano tangente a un punto de la superficie del terreno es un ejemplo del enfoque analítico de la diferenciación utilizando cálculo diferencial. (Eyton, 1991:87).

El cálculo de los atributos topográficos de un paisaje obtenidos por diferenciación numérica directamente sobre los puntos muestrales del MNA, sin determinación de una superficie matemática, constituye un enfoque de utilidad limitada porque no se adapta más que a los MNA en grilla regular y porque no produce resultados físicamente realistas (Collins, 1975; Douglas, 1986; Moore *et al.*, 1993). Además, este método es muy sensible a los errores en la estimación del valor de altitud. Tales errores sufren un proceso de difusión espacial cuando se calculan mapas derivados por diferenciación numérica de matrices de altitud; esta es la razón por la cual estos mapas son menos fiables y muestran más rugosidad o “ruido” que los mapas “primitivos” (originales, no derivados).

El análisis de la geometría de la superficie del terreno juega un papel importante para el estudio de los procesos que estructuran el paisaje. *“Estimaciones fiables de los parámetros topográficos, que reflejan la geometría del terreno, son necesarias para la modelado geomorfológico, hidrológico y ecológico porque el terreno controla el flujo de masa en el paisaje”* (Mitasová et Hofierka, 1993:657).

Para analizar las características topográficas de un paisaje, una superficie es fijada a los puntos de altitud medidos. Barnhill (1983) clasificó los métodos de fijación de la superficie en *locales* (la superficie fijada en un punto esta en relación únicamente con los datos del entorno local) y *globales* (la superficie fijada en un punto utiliza la mayoría de los puntos muestrales, con una remarcable pérdida de exactitud). Entre los métodos *locales*, se distingue la fijación por piezas (pequeñas secciones curvadas de la superficie local con continuidad matemática en y entre las diferentes piezas) y por *puntos* (fijación

local *discreta* basada en el cálculo de las diferencias finitas a partir de puntos de altitud medida, sin ninguna continuidad matemática) (Moore *et al.*, 1988:448).

Los atributos topográficos, como la *pendiente*, el *área específica de la cuenca*, la *orientación del terreno*, la *curvatura* (ya sea en planta o en perfil), pueden ser derivados de cualquier tipo de MNA. Sin embargo, la estructura más simple y más utilizada para la estimación de estos atributos es la grilla regular. Se han señalado limitaciones para todos los métodos (Moore *et al.*, 1993:9). Sin embargo, ciertas limitaciones, como el tamaño de los archivos en la estructura basada en isohypsas, las dificultades para crear la conexión entre las facetas ladera arriba, en las estructuras RTI, han sido sobrepasadas progresivamente.

Según Moore *et al.*, 1993, en el contexto particular de la modelado hidrológico dinámica, la utilización de grillas para describir la repartición espacial de datos topográficos no es apropiada. Los modelos hidrológicos simulan el flujo de agua a través de la superficie y la célula elemental del MNA debería reflejar esta necesidad. El método basado en isohypsas ofrece ventajas sustanciales en este sentido (Moore *et al.*, 1988; Moore et Grayson, 1989, 1991; Moore *et al.*, 1993) porque la estructura de las áreas elementales se basa en la forma en que el agua escurre sobre la superficie del terreno.

Recientemente, Mitsová et Hofierka (1993) propusieron un método que “*es independiente de la distribución espacial de los datos de entrada*” (*grillas, puntos dispersos o isolíneas*). *Ella utiliza la estructura en grilla estándar para almacenar, manipular y visualizar los resultados del análisis topográfico y, al mismo tiempo utiliza los parámetros de calidad de los métodos basados en isolíneas. Este método se basa en la interpolación con splines completamente regularizadas con tensión (CRST) y fue especialmente construido para respetar las exigencias del análisis topográfico cuando se requiere construir estimaciones fiables de la primera y segunda derivadas de la altitud, es decir, la pendiente de la curvatura del relieve*” (Mitsová et Hofierka, 1993:658).

Como quiera que sea, es evidente que las estructuras RTI y trapezoidales son preferibles si el objetivo es obtener una representación fiel del relieve, teniendo en cuenta que la estructura topográfica es directamente visible y que puede ser descrita en forma explícita. Contrariamente, la estructura en grilla es tan simple como rígida, lo que se constituye en su limitación principal. En lo que concierne a la representación distribuida de otras variables (no directamente visibles), las ventajas de las estructuras RTI y trapezoidales son menores.

Obtener representaciones fieles del terreno es la primera etapa en el procedimiento de derivación de mapas fiables. La escogencia de algoritmos de derivación bien adaptados a las diferentes mallas (estructuras o "maillages" espaciales) completa la tarea. Se presentan a continuación algunos de los algoritmos disponibles en la literatura.

ALGORITMOS PARA EL CÁLCULO DE DERIVADAS ESPACIALES AL PARTIR DEL MNA.

Derivación por diferencias finitas aplicadas a las cuadrículas regulares

Para ilustrar los diferentes algoritmos de diferenciación numérica propuestos en la literatura, utilizaremos la grilla descrita en las figuras 90a 90b. Los valores que se presentan en la figura 90a muestran simplemente posiciones en la matriz, las cuales fueron codificados de una forma más o menos arbitraria. La figura 90b, contrariamente, se refiere a las altitudes de la superficie correspondiente a la matriz ilustrada en la figura 90a. Estos valores provienen de un sector del MNA de la cuenca del río Uruca (figura 91) pero, para el ejercicio de cálculo, nosotros les restamos 1270 metros. Para los cálculos numéricos, se asumirán *píxeles* cuadrados con longitud de lado igual a 1 metro y con el valor numérico de altitud situado en el centro del *píxel*.

	P ₁₃	P ₁₄	P ₁₅	P ₁₆	P ₁
	P ₁₂	P ₂₃	P ₂₄	P ₁₇	P ₂
	P ₁₁	P ₂₂	P ₂₅	P ₁₈	P ₃
	P ₁₀	P ₂₁	P ₂₀	P ₁₉	P ₄
	P ₉	P ₈	P ₇	P ₆	P ₅

Cálculo del gradiente:

Para el cálculo del *gradiente* de una propiedad regionalizada (distribuida en el espacio), en una orientación dada, Burrough (1986:50) propone, para el punto p25:

$$G_{\text{este}} = \partial z / \partial x = (P_{18} - P_{22}) / 2\partial x$$

$$G_{\text{norte}} = \partial z / \partial y = (P_{24} - P_{20}) / 2\partial y$$

	7.96997	8.08997	8.22998	8.39001	8.56006
	8.46997	8.60999	8.76001	8.92004	9.07996
	8.95996	9.10999	9.27002	9.43005	9.59998
	9.45996	9.62000	9.78003	9.94995	10.12000
	9.95996	10.13000	10.30005	10.46997	10.64001

(22)

numéricamente:

$$G_{\text{este}} = (9.43005 - 9.10999) / 2 = + 0.16003$$

$$G_{\text{norte}} = (8.76001 - 9.78003) / 2 = - 0.51001 \text{ (el signo indica la orientación del gradiente)}$$

Surfer estima estos valores en 0.159973 y -0.511597, respectivamente. Las diferencias pudiendo resultar del efecto de redondeo o de variaciones menores en la fórmula de cálculo.

Si el cálculo se hace en la orientación diagonal a la grilla, se deberá utilizar $2\partial x\sqrt{2}$ o $2\partial y\sqrt{2}$ en la parte inferior de la ecuación (22).

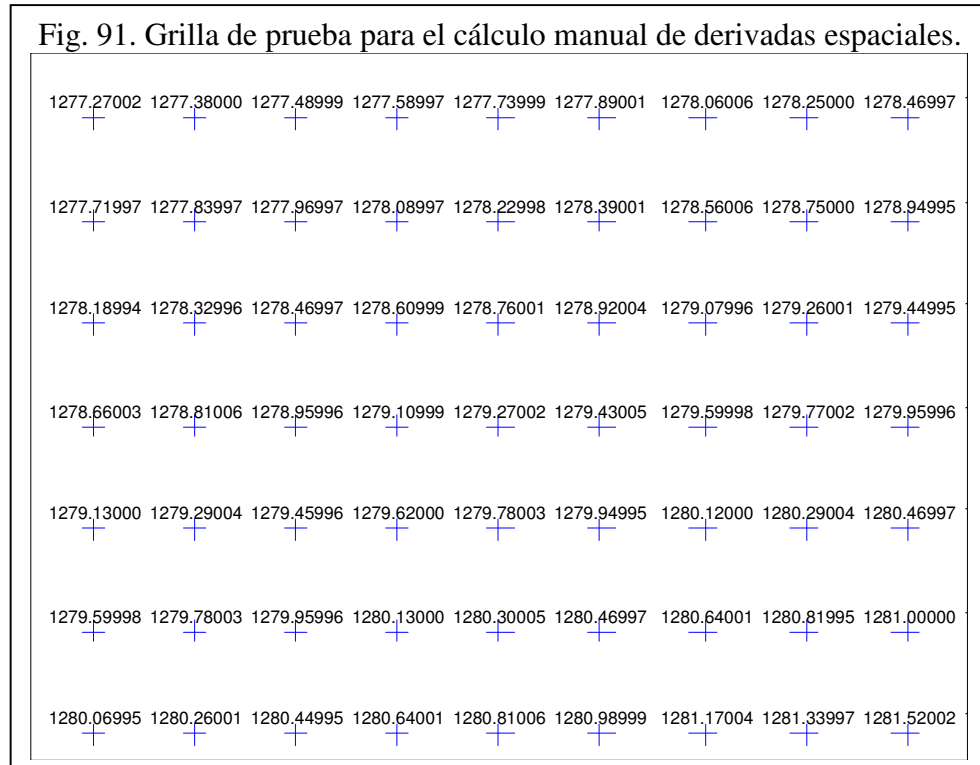
La ecuación (22) presenta como inconveniente que los errores locales en la estimación de la altitud tienen fuertes consecuencias sobre la evaluación de la pendiente derivada. Horn (1982) propone una solución más completa:

$$G_{\text{este}} = \partial z / \partial x = ((P_{17} + 2P_{18} + P_{19}) - (P_{23} + 2P_{22} + P_{21})) / 8\partial x \text{ et}$$

$$G_{\text{norte}} = \partial z / \partial y = ((P_{17} + 2P_{24} + P_{23}) - (P_{19} + 2P_{20} + P_{21})) / 8\partial y$$

(23)

Esta constituye una expresión generalizada para los gradientes este-oeste y norte-sur respectivamente.



Cálculo de la inclinación de la pendiente:

Combinando las expresiones (22) y (23) como una multiplicación vectorial, se puede obtener el valor máximo de la pendiente, que usualmente no coincide con aquellos obtenidos en las orientaciones N-S y E-O:

$$P_{incl} = \text{SQRT} ((\partial z/\partial x)^2 + (\partial z/\partial y)^2) \quad (\text{radianes}) \quad (24)$$

$$P_{incl} = \text{SQRT} ((G_{este})^2 + (G_{norte})^2)$$

Numéricamente:

$$P_{incl} = \sqrt{(0.16^2 + (-0.51)^2)} = \mathbf{0.5345} \text{ radianes} = 28.12 \text{ grados}$$

Surfer estima en este caso 28.1924, la diferencia siendo razonablemente atribuible al número de cifras significativas consideradas en el cálculo (15 en Surfer).

Cálculo de la orientación de la pendiente:

La estimación de la orientación de la pendiente o azimut se obtiene a partir de la primera derivadas de la altitud siguiendo un procedimiento de dos etapas propuesto por Eyton (1991:89):

La *primera etapa* consiste en calcular el ángulo local ϕ entre el valor del *gradiente direccional este* (G_{este}) et el de la inclinación general de la pendiente (P_{incl}):

$$P_{\text{oriloc}} = \phi = \cos^{-1} \left(\frac{\partial z / \partial x}{\sqrt{(\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2}} \right) = \cos^{-1} (G_{\text{este}} / P_{\text{incl}}) \quad (25)$$

Para P_{25} obtenemos:

$$P_{\text{oriloc}} = \cos^{-1} (0.16 / 0.5345) = \mathbf{72.58 \text{ grados.}}$$

En la *segunda etapa*, se debe convertir el ángulo local ϕ en un azimut θ , para el cual utilizamos reglas basadas en los signos de los vectores de *gradiente* (fig. 92).

Para P_{25} , $\partial z / \partial x$, es decir G_{este} , es *positivo*, mientras que $\partial z / \partial y$ (sea G_{norte}) es *negativo* por tanto, l'orientación de la pendiente, θ , resulta:

$$P_{\text{orient}} = 270 + 72.58 = \mathbf{342.58} \quad (\text{norte})$$

La estimación hecha con *Surfer* fue 342.636.

Cálculo de la curvatura (derivada segunda):

La curvatura del terreno representa la variación de la pendiente a lo largo de la superficie. Para una orientación dada, digamos el eje "x", si la variación es nula, $\partial^2 z / dx^2 = 0$, la curvatura es cero y la pendiente es rectilínea; si $\partial^2 z / dx^2 > 0$ la curvatura es positiva (*cóncava*) et, si $\partial^2 z / dx^2 < 0$ la curvatura es negativa (*convexa*) (fig. 93).

En una representación matricial:

$$\begin{aligned} C_{\text{este}} &= \partial^2 z / dx^2 = (2P_{25} - P_{22} - P_{18}) / (\partial x)^2 \\ C_{\text{norte}} &= \partial^2 z / dy^2 = (2P_{25} - P_{20} - P_{24}) / (\partial y)^2 \end{aligned} \quad (26)$$

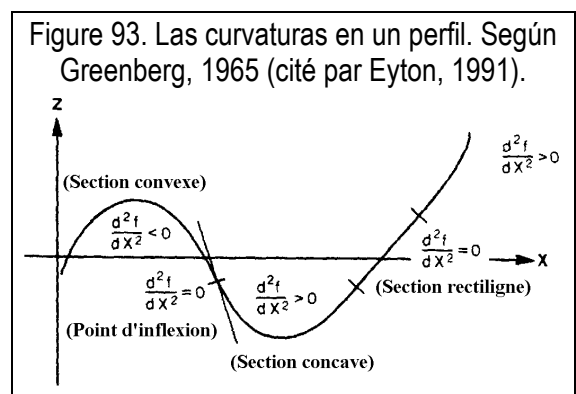
numéricamente:

$$\begin{aligned} C_{\text{este}} &= (2 \cdot 9.27002 - 9.10999 - 9.43005) / (1^2) = \mathbf{0} && (\text{pendiente rectilínea}) \\ C_{\text{norte}} &= (2 \cdot 9.27002 - 9.78003 - 8.76001) / (1^2) = \mathbf{0} && (\text{pendiente rectilínea}) \end{aligned}$$

En *Surfer* los resultados fueron: 0.00524902 et 0.00439453 respectivamente, indicando perfiles con una concavidad mínima de 1%.

Figure 92. Ley de signos para el cálculo de la orientación del relieve.

$\partial z / \partial x$	$\partial z / \partial y$	Azimut
+	+	$270 - \phi$
+	-	$270 + \phi$
-	+	$90 + \phi$
-	-	$90 - \phi$



Si uno se interesa exclusivamente por el valor absoluto, se puede estimar la curvatura máxima como el producto vectorial de las expresiones (26), sea:

$$\begin{aligned} C_{\max} &= \text{SQRT} ((\partial^2 z / \partial x^2)^2 + (\partial^2 z / \partial y^2)^2) \\ C_{\max} &= \text{SQRT} ((C_{\text{este}})^2 + (C_{\text{norte}})^2) \end{aligned} \quad (27)$$

Numéricamente:

$$C_{\max} = \sqrt{0} = 0$$

El programa *Surfer* no hace automáticamente este cálculo. Utilizando los valores de curvatura *este* y *norte* calculados con este programa, se puede estimar que C_{\max} vale 0.0068457.

Usualmente, la curvatura es estimada en una orientación más significativa en términos del *análisis del terreno*. Dos de tales direcciones son: el azimut de P_{\max} cuya segunda derivada de la altitud se conoce como la *curvatura en perfil*, y la normal a dicho azimut, cuya segunda derivada de altitud es la *curvatura en planta*. En *Surfer*, se puede calcular también la *curvatura tangencial*.

Mientras que la orientación y la inclinación de la pendiente afectan la *orientación* y la *velocidad* de un flujo que se desplaza a lo largo de una ladera, la curvatura del terreno provoca *cambios de velocidad* relacionados con las variaciones de la curvatura en perfil, y fenómenos de *convergencia* (concentración) y *divergencia* (difusión), que se relacionan con las variaciones de la curvatura en planta. La *curvatura tangencial* propuesta en *Surfer* es análoga a la curvatura en planta, pero la divergencia (o confluencia) es analizada en relación al plano vertical.

Estos conceptos tienen des aplicaciones prácticas inmediatas. Dikau (1989, 1990) propone una metodología para cortar el territorio en una jerarquía de unidades geométricas y topológicas llamadas *morfo-facetitas* y *morfo-elementos*. Estas dos categorías constituyen *mesoformas* que son delimitadas con base en un análisis de pendientes y de curvaturas del relieve. Hall et Olson (1991) discuten la importancia del análisis de terreno, especialmente de la distribución espacial de la convergencia y de la divergencia en el modelado del flujo de agua y su implicación en la formación y evolución del suelo.

Los algoritmos incluidos en *Surfer* estiman los tres tipos de curvatura siguiendo las ecuaciones de Mitásová et Hofierka (1993) et Mitásová et Mitás (1993).

La *curvatura en perfil* se define como:

$$\begin{aligned} C_{\text{perfil}} &= ((\partial^2 z / \partial x^2) (\partial z / \partial x)^2 + 2(\partial^2 z / \partial x \partial y) (\partial z / \partial x) (\partial z / \partial y) + (\partial^2 z / \partial y^2) (\partial z / \partial y)^2) \\ &\quad / ((\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2) * \sqrt{(((\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2) + 1)^3} \\ C_{\text{perfil}} &= ((C_{\text{este}}) (P_{18}-P_{22})^2 + 2*(C_{\max}) (P_{18}-P_{22}) (P_{24}-P_{20}) + (C_{\text{norte}}) (P_{24}-P_{20})^2) \\ &\quad / ((P_{18}-P_{22})^2 + (P_{24}-P_{20})^2) * \sqrt{(((P_{18}-P_{22})^2 + (P_{24}-P_{20})^2) + 1)^3} \end{aligned} \quad (28)$$

Para P₂₅, evidentemente, la solución numérica de l'expresión (28) será *cero*, puesto que tanto C_{este} como C_{norte} y C_{max} valen *cero*. Sin embargo, si se utilizan los valores obtenidos en *Surfer* para estas mismas cantidades, se obtiene:

$$C_{\text{perfil}} = ((0.00524902) (9.43-9.11)^2 + 2*(0.0068457) (9.43-9.11) (8.76-9.78) + \frac{(0.00439453) (8.76-9.78)^2}{(((9.43-9.11)^2 + (8.76-9.78)^2)} * \sqrt{(((9.43-9.11)^2 + (8.76-9.78)^2) + 1})^3)$$

$$C_{\text{perfil}} = (0.0005374996 - 0.00446887296 + 0.00457206901) / (1.1428 * \sqrt{(2.1428)^3})$$

$$C_{\text{perfil}} = 0.0026163745$$

La *curvatura en planta* se define como:

$$C_{\text{plan}} = \frac{((\partial^2 z / \partial x^2) (\partial z / \partial y)^2 - 2(\partial^2 z / \partial x \partial y) (\partial z / \partial x) (\partial z / \partial y) + (\partial^2 z / \partial y^2) (\partial z / \partial x)^2)}{\sqrt{(((\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2)^3)}} \quad (29)$$

La solución obtenida en *Surfer* es C_{plan} = 0.00339076.

Según el trabajo de Mitsova et Hofierka, los fenómenos de divergencia / convergencia son mejor descritos por la *curvatura tangencial*, la cual se mide sobre el plano normal a la dirección perpendicular al *gradiente*. Esto se expresa:

$$C_{\text{tangencial}} = \frac{((\partial^2 z / \partial x^2) (\partial z / \partial x)^2 + 2(\partial^2 z / \partial x \partial y) (\partial z / \partial x) (\partial z / \partial y) + (\partial^2 z / \partial y^2) (\partial z / \partial y)^2)}{\sqrt{((\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2) * \sqrt{((\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2 + 1)}}} \quad (30)$$

Para P₂₅ C_{tangencial} = 0.00160191.

Sobre la figura 94, se puede notar que la curvatura en perfil es muy sensible a las mínimas distorsiones en el espacio definido por la variable "z" (isohypsas, color rojo). Sin embargo, se nota también una consistencia remarcable: la coloración azul corresponde a los valores negativos (convexidades) mientras que el verde se relaciona con valores positivos (concavidades).

En la figura 95, colocamos el sitio de pruebas en un contexto espacial más grande et suministramos una muestra des los resultados numéricos (altitud y curvatura en perfil) obtenidos con el programa Surfer. Las isolíneas en color negro representan las curvas de nivel extraídas de la carta topográfica mientras que las rojas son curvas de nivel interpoladas. En esta imagen contextual, se puede notar la existencia de una depresión en la parte norte-oeste de la pequeña zona de ensayo, razón por la cual se percibe una buena estructuración espacial de la curvatura del relieve (tonalidades azules y verdes).

Figure 94. Mapa de la curvatura en perfil para la zona de pruebas (fig.91). Isohypsas en rouge.

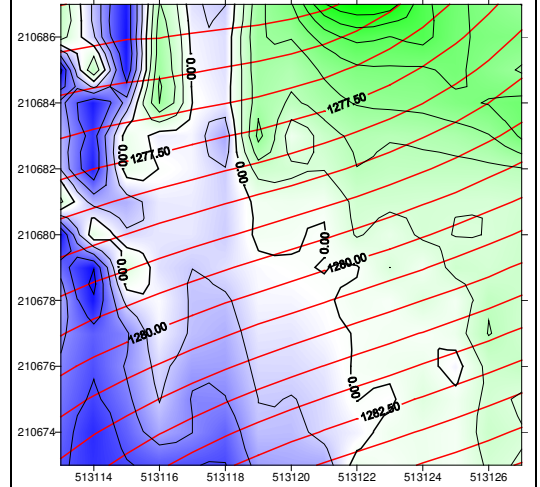
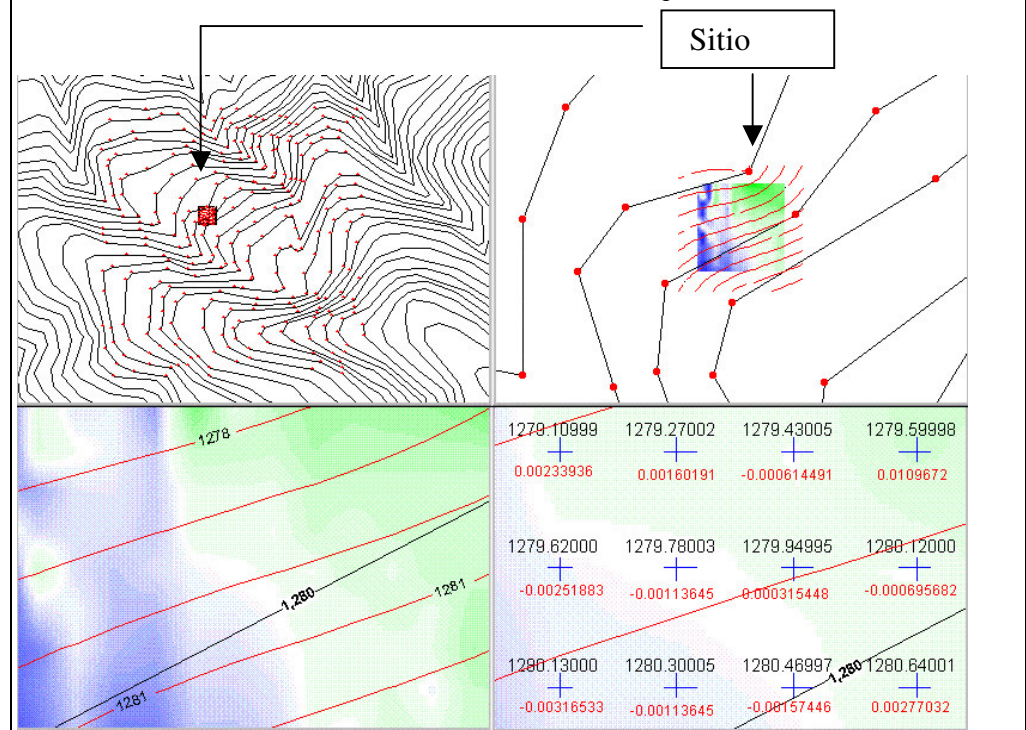


Figure 95. Fisiografía en el contexto espacial de la pequeña zona de ensayo presentada en la fig. 91 (recuadro rojo). Curvas de nivel originales en negro y derivadas del MNA en rouge. Valores de altitud (interpolados) en negro y valores de curvatura del relieve en rouge.



Derivación por cálculo sur elementos finitos triangulares.

La mayoría des procedimientos en RTI suponen triángulos inclinados pero teniendo una superficie interne plana. Esto facilita el cálculo de la inclinación et de la orientación de la pendiente. Palacios y Cuevas (1986) así como Jones et al. (1990) describen procedimientos para derivar estos atributos à partir de las redes triangulares.

Según Jones et al. (1990:1237), la ecuación del plano definida por los tres vértices d'un triángulo vale:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (31)$$

donde los coeficientes A,B,C, et D son calculados a partir de las coordenadas de los tres vértices (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) :

$$A = y_1 (z_2 - z_3) + y_2 (z_3 - z_1) + y_3 (z_1 - z_2) \quad (32a)$$

$$B = z_1 (x_2 - x_3) + z_2 (x_3 - x_1) + z_3 (x_1 - x_2) \quad (32b)$$

$$C = x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) \quad (32c)$$

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1 \quad (32d)$$

Pudiéndose re-escribir la ecuación 10 como:

$$z = f(x,y) = -((A/C)x + (B/C)y + (D/C)) \quad (33)$$

lo cual permite calcular la altitud de cualquier punto sobre de la superficie del triángulo. Además, si se toma la première derivada de la ecuación 13 con relación a x y con relación a y, se obtiene:

$$\partial f / \partial x = - (A/C) \quad (34d)$$

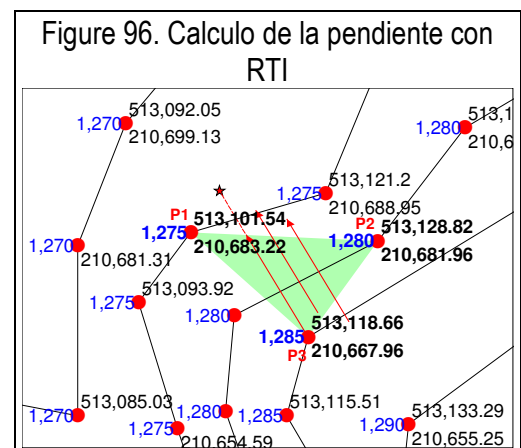
$$\partial f / \partial y = - (B/C) \quad (35)$$

y, en este caso:

$$P_{RTI} = \partial f / \partial x + \partial f / \partial y \quad (36)$$

donde P_{RTI} es la inclinación de la pendiente de un triángulo que forma parte de la red triangular.

Para el triángulo definido por los vértices (P1,P2,P3) (figure 96):



$$A = 210683.22 (1280 - 1285) + 210681.96 (1285 - 1275) + 210667.96 (1275 - 1280) \\ A = 63.7$$

$$B = 1275 (513128.82 - 513118.66) + 1280 (513118.66 - 513101.54) +$$

$$1285 (513101.54 - 513128.82)$$

$$B = -187.2$$

$$C = 513101.54 (210681.96 - 210667.96) + 513128.82 (210667.96 - 210683.22) +$$

$$513118.66 (210683.22 - 210681.96)$$

$$C = -394.721$$

$$P_{RTI} = (-63.7 / -394.721) + (187.2 / -394.721)$$

$$P_{RTI} = -0.3128 \text{ (o } 31.28\% \text{; el signo no es significativo).}$$

Para el cálculo de la orientación, seguiremos el método en dos etapas propuesto por Eytton (1991) y tal como se utiliza para los cálculos en el modelo de las cuadrículas regulares (ver arriba). Así:

$$P_{oriloc} = \text{Cos}^{-1} (\text{Gest} / P_{RTI}) \quad (P_{RTI} \text{ equivale a } P_{incl} \text{ en la ecuación 3)}$$

$$P_{oriloc} = \text{Cos}^{-1} ((\partial f / \partial x) / P_{RTI})$$

$$P_{oriloc} = \text{Cos}^{-1} (0.1614 / 0.3128)$$

$$P_{oriloc} = \mathbf{58.94 \text{ grados.}}$$

Y, si se analizan los signos de los gradientes según x y y de la primera derivada de la función expresada en la ecuación 13, se obtiene:

$$\partial f / \partial x = - (A/C) = 0.1614 \text{ (signo } \textit{positivo})$$

$$\partial f / \partial y = - (B/C) = - 0.4742 \text{ (signo } \textit{negativo})}$$

esto nos sitúa en el cuadrante NO y, según la figura 86:

$$RTI_{orient} = P_{orient} = 270 + 58.94 = \mathbf{328.94 \text{ grados}}$$
 (flechas rojas en la figura 96).

Derivación por cálculo sobre elementos finitos en una estructura trapezoidal.

Si se divide el territorio en trapezoides normales a las isohypsas, el cálculo de la inclinación de la pendiente deviene una operación simple. Moore *et al.* (1988) derivaron las expresiones siguientes:

$$P_{trap1} = ((\Delta h / (\sqrt{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2)})) + (\Delta h / (\sqrt{((x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2)})))/2$$

y

$$P_{trap2} = \Delta h / \sqrt{(((x_2 + x_4)/2) - ((x_1 + x_3)/2))^2 + (((y_2 + y_4)/2) - ((y_1 + y_3)/2))^2}$$

Donde: P_{trap1} expresa la pendiente promedio de los dos vectores normales a las isolíneas que delimitan el trapezoide, y P_{trap2} expresa la pendiente promedio a lo largo del eje central del trapezoide.

En zonas planas o en las crestas redondeadas, estas dos expresiones dan resultados sensiblemente similares; sin embargo, en el fondo de valles estrechos, P_{trap1} aproxima la pendiente del terreno drenando hacia un colector común, mientras que P_{trap2} aproxima la pendiente del curso de agua. Numéricamente (fig. 97):

$$P_{trap1} = \frac{((5 / \sqrt{((513150.1 - 513169.2)^2 + (210648.6 - 210642.8)^2))) + (5 / \sqrt{((513159.5 - 513172.0)^2 + (210661.9 - 210647.8)^2}))}{2}$$

$$P_{trap1} = (0.2505 + 0.2654) / 2$$

$$P_{trap1} = 0.2579 \text{ (25.79\%)}$$

Mientras que :

$$P_{trap2} = 5 / \sqrt{(((513169.2 + 513172.0)/2) - ((513150.1 + 513159.5)/2))^2 + (((210642.8 + 210647.8)/2) - ((210648.6 + 210661.9)/2))^2}$$

$$P_{trap2} = 5 / \sqrt{(249.64 + 99.0025)}$$

$$P_{trap2} = 0.26778 \text{ (26.78\%)}$$

Nosotros haremos el cálculo de orientación utilizando la línea mediatriz para la cual acabamos de estimar el valor P_{trap2} promedio.

Las posiciones centrales a lo largo de las *isohypsas* son calculadas previamente como :

$$X_{13} = (513150.1 + 513159.5) / 2 = 513154.80$$

$$Y_{13} = (210648.6 + 210661.9) / 2 = 210655.25$$

$$X_{24} = (513169.2 + 513172.0) / 2 = 513170.60$$

$$Y_{24} = (210642.8 + 210647.8) / 2 = 210645.30$$

Esto nos permite calcular la longitud de la línea mediatriz (h) así como cada uno de los lados del triángulo rectángulo formado (∂x , et ∂y):

$$h = \text{SQRT}((X_{13} - X_{24})^2 + (Y_{13} - Y_{24})^2) = 18.67197$$

$$\partial x = X_{24} - X_{13} = 15.8$$

$$\partial y = Y_{13} - Y_{24} = 9.95$$

La orientación local de la pendiente es entonces :

$$P_{oriloc} = \tan^{-1}(\partial y / \partial x)$$

$$P_{oriloc} = 32.20^\circ$$

Y, la orientación azimuthal vale:

$$\text{TRAP}_{orient} = 270^\circ + 32.2^\circ \text{ (siguiendo la ley de signos utilizada previamente)}$$

$$\text{TRAP}_{orient} = 302.2^\circ \text{ (flecha negra en la figure 97).}$$

