

© Rafael Arce Mesén
Escuela de Geografía
Universidad de Costa Rica
Junio, 2001.

GF-0102 ANÁLISIS ESPACIAL
I SEMESTRE 2001

INTERPOLACIÓN ESPACIAL

MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN ESPACIAL

Método de las medias (promedios) móviles ponderados

Este método consiste en estimar el valor de altitud Z^* según una función inversa de la distancia. Esta estimación se repite para cada punto en una grilla (cuadrícula) regular utilizando un vecindario circular o elíptico de radio conocido (fig. 76). Formalmente :

$$Z^*(\mathbf{x}_j) = \left(\sum_{i=1}^n Z(\mathbf{x}_i) \cdot d_{ij}^{-\alpha} \right) / \left(\sum_{i=1}^n d_{ij}^{-\alpha} \right) \quad (1)$$

donde Z^* es el valor de altitud estimado,

\mathbf{x}_j son los puntos para los cuales se hace la interpolación.

\mathbf{x}_i son los puntos muestrales en el vecindario,

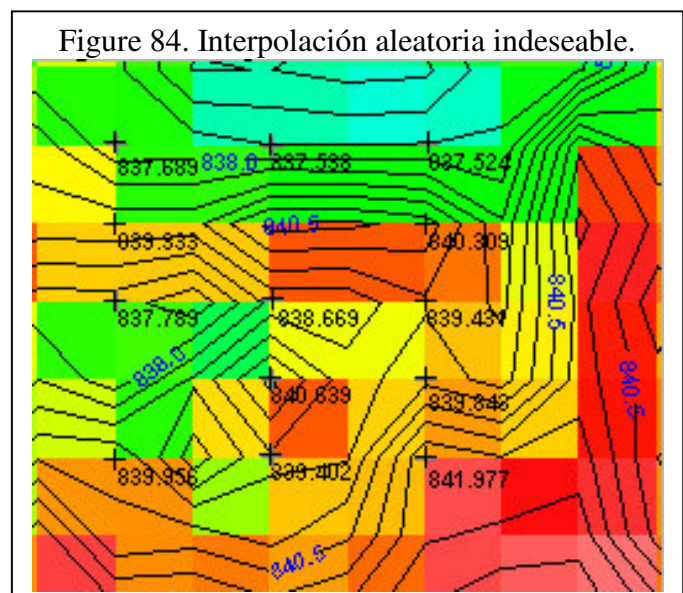
Z es el valor de altitud en un punto muestral dentro del vecindario,

d_{ij} es la distancia entre el punto muestral \mathbf{x}_i y el punto interpolado \mathbf{x}_j , y

$-\alpha$ es el factor de ponderación de la distancia (siempre negativo).

Como regla general la autocorrelación disminuye con el incremento de la distancia d_{ij} entre el valor observado Z y el valor estimado Z^* , de ahí el que se use un coeficiente negativo ($-\alpha < 0$) en la función de ponderación ($d_{ij}^{-\alpha}$). Habitualmente, el coeficiente $-\alpha$ vale **-2** indicando que la contribución de los puntos del vecindario en la estimación de Z^* decrece según una función cuadrática inversa de la distancia. Un coeficiente $-\alpha$ de **-1** indica un decrecimiento lineal de la contribución de los puntos en función de la distancia d_{ij} . Los pesos relativos de un punto muestral \mathbf{x}_i en la estimación de cada una de las altitudes Z^* de los diversos puntos \mathbf{x}_j en la grilla depende de su distancia con relación al nodo (\mathbf{x}_j) considerado, del número de vecinos en la región de búsqueda (i.e., en el vecindario), así como de la distancia total entre todos los puntos muestreados del vecindario y del nodo considerado. El valor Z^* en un nodo, se determina no solo por la contribución relativa de cada punto del vecindario, sino también por sus valores absolutos y por la estrategia que permitió su selección.

Exceptuando la estrategia de selección, los otros cuatro parámetros deben cambiar cuando uno se desplaza de un nodo de la grilla hacia el siguiente. Sin



embargo, cuando se trata de crear una grilla demasiado densa (una grilla con un número de nodos superior a diez veces el número total de puntos muestreados, sucede a veces que los puntos utilizados para estimar el valor Z^* son los mismos para dos o más nodos de la grilla. En este caso, el valor Z^* cambiará en función de variaciones en los pesos relativos de los diversos puntos considerados, y no en función de los valores Z medidos. Una variación de este tipo deriva más del método utilizado que de los datos medidos y produce una matriz de altitudes inestable donde el “ruido” del algoritmo supera a la señal de los valores reales (fig. 84).

Cuando el valor del parámetro $-\alpha$ aumenta, la superficie interpolada deviene menos lisa y aparece un efecto conocido como “ojos de buey” (Ver los núcleos de la figura 84). Esto traduce una contribución rápidamente decreciente de los vecinos relativamente alejados cuando se utilizan valores $-\alpha > -1$. Por otra parte, cuanto más lisa es la superficie, más se aproximan los valores Z^* interpolados a los valores Z medidos en una localización particular.

El algoritmo del inverso de la distancia utilizado en el programa Surfer (Golden Software, 1995: 5.30) agrega en la fórmula de cálculo un parámetro de suavizado adicional (δ) para tomar en cuenta la incertidumbre de los datos. Esto produce una interpolación menos rígida, aún cuando se utilizan potencia α elevadas, como 2, 3, o 4.

Muchas críticas han sido hechas a propósito de la interpolación por el método de las medias móviles ponderadas: sensibilidad al tamaño del vecindario, sensibilidad a las distribuciones anisotrópicas de los puntos muestrales, producción de superficies con múltiples núcleos, incapacidad de representar los detalles lineales en ausencia de la estimación de la incertidumbre asociada a las estimaciones de Z^* .

La mínima curvatura.

De acuerdo con su nombre, este método de interpolación trata de producir la superficie continua de mínima curvatura sobre la cual todos los puntos de observación están anclados. Superficies aún menos curvadas son por ejemplo las superficies de tendencia basadas en una *regresión polinomial de mínimos cuadrados* o bien las superficies planas producidas por las redes triangulares: RTI. Sin embargo, las *superficies de tendencia* no tratan de reproducir los valores observados con exactitud, razón por la cual Laslett *et al.* (1987:331-332) no los considera como procedimientos de interpolación *strictu sensu*¹; mientras que las superficies en RTI no son superficies con continuidad matemática.

¹ Las *superficies de tendencia*, así como aquellas producidas por las series de Fourier son consideradas métodos de interpolación globales, en los cuales la superficie interpolada es una aproximación grosera de la totalidad de los valores Z medidos. Se les distingue de los métodos de interpolación locales (el *Krigeage*, los splines, el inverso de la distancia, etc.), que utilizan la información de un subconjunto (el vecindario) de puntos de muestreo. La utilidad de los primeros consiste en encontrar la estructura espacial regional así como

El método de la *mínima curvatura* está inspirada por el principio de las *reglas flexibles* (“*thin plates*”) en las cuales la presión ejercida en un punto dado produce una reacción (deformación) que afecta un ambiente local determinado por ciertos puntos fijos o fronteras. En el espacio 2D, este ambiente local es conocido como una *placa* o *pieza* que formando parte del mosaico total de la superficie interpolada. La unión entre las diferentes placas del mosaico debe definir una superficie continua, derivable al primer y al segundo grados (pendiente y curvatura).

La aproximación de una superficie tal es una extensión de las funciones *splines*, equivalentes matemáticas de las *reglas flexibles* utilizadas por los dibujantes. Son funciones polinomiales seccionadas en las cuales aquellas de tercer grado reproducen bastante bien las deformaciones de las *reglas flexibles*. Una vez extendidas al espacio 3D, estas funciones son llamadas *bicubic splines* ou *B-splines* (Burrough, 1986:152).

Como lo menciona Briggs (1974:39), la aproximación por *B-splines* o por la mínima curvatura es una solución de interpolación que tiene como finalidad estimar el conjunto de los valores Z^* para los nodos de una grilla regular, de manera que la estimación para el punto de grilla se acerca al valor observado Z cuando la posición del punto de observación se acerca a la posición del punto de grilla. Este enfoque de interpolación no obliga a conocer de manera explícita la función continua en el espacio 3D que reproduce la superficie real. En el primer caso, la interpolación está hecha a partir de una solución numérica por diferencias finitas, mientras que en el último, se debe encontrar una solución analítica a través del cálculo diferencial.

Desde una perspectiva diferencial, le problema a resolver consiste en encontrar la deformación inducida sobre la “*regla flexible*” por las fuerzas que actúan sobre puntos discretos, de manera que los desplazamientos hacia estos puntos sean iguales a las observaciones Z conocidas. Sea u el desplazamiento, x, y las variables de espacio, y f_n las fuerzas que actúan en las posiciones (x_n, y_n) , $n = 1, \dots, N$, donde las observaciones son w_n , entonces:

$$\begin{aligned} \Delta^4 u &= f_n \text{ si } x = x_n \text{ et } y = y_n, \text{ ó} \\ &= 0 \text{ en los otros casos.} \end{aligned} \quad (2)$$

donde:

$$u(x_n, y_n) = w_n \text{ (desplazamiento = valor “Z” observado)} \quad (3)$$

y

los núcleos alejados de esta tendencia (Burrough, 1986), mientras que los últimos dan estimaciones realistas de los valores esperados para las localidades no visitadas al momento del muestreo. El método de la mínima curvatura es de algún modo un método híbrido puesto que realiza primero una interpolación global, pero a continuación acerca las estimaciones a través de un proceso iterativo que toma en cuenta los residuos locales.

$$\partial / \partial x (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) = 0 \quad (4)$$

son condiciones límites a respetar, y la solución de (2) es hallada numéricamente teniendo en cuenta que la curvatura total debe ser minimizada. En las diferencias finitas, esto se expresa por:

$$C(u) = \iint ((\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2)^2 dx dy \quad (C = \text{curvatura total}) \quad (5)$$

El operador $\Delta^4 u$ es conocido como *el operador bi-armónico* (Golden Software, 1995:5.63), útil para expresar, entre otras, las funciones de la curvatura de una regla flexible, del flujo viscoso en un medio poroso, y las tensiones en un medio con elasticidad lineal. Por definición: :

$$\Delta^4 u = \partial^4 u / \partial x^4 + 2 \partial^4 u / \partial x^2 \partial y^2 + \partial^4 u / \partial y^4 \quad (6)$$

Para la interpolación bi-dimensional, un conjunto completo de ecuaciones diferenciales permitiendo minimizar la ecuación (5) han sido derivadas (Briggs, 1974:48). Las soluciones varían según la interpolación sea hecha cerca o lejos de los bordes, cerca o lejos de los puntos de observación, en las esquinas o sobre los bordes.

Si las observaciones no están dispuestas en una grilla regular, la solución no está basada sobre la ecuación (4) sino sobre la condición expresada por la ecuación (7):

$$(\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2) (\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2) = 0 \quad (7)$$

lo que conduce a un conjunto de soluciones expresadas por diversas ecuaciones algebraicas que son mejor resueltas utilizando procedimientos *iterativos* de aproximación (Young, 1962, cité par Briggs, 1974), en el cual el valor de partida está asignado ya sea utilizando el valor de observación del punto más próximo o bien un promedio de los valores observados en el vecindario.

Smith et Wessel (1990) mencionan que el método de interpolación natural para la curvatura mínima es la función *spline bicubica*, pero este procedimiento produce oscilaciones y extraños puntos de inflexión sobretodo en las regiones con déficit de datos. Hutchinson (1989) introdujo mejoras importantes en el procedimiento: (a) agregando términos de la primera derivada en la condición de variación, lo que minimiza la sobreestimación, (b) incorporando un algoritmo considerando la red de drenaje, (c) utilizando una grilla de resoluciones múltiples para reducir el tiempo de cálculo.

Smith et Wessel (1990), muestran que la agregación de un parámetro de tensión en la ecuación de la flexión de la "curva flexible" permite eliminar las inflexiones artificiales. Su enfoque es llamado *splines en tensión*. Consiste en suavizar la

condición dirigida a minimizar la curvatura global, en beneficio de una solución con más variación local (Smith et Wessel, 1990:296).

Mitásová et Hofierka (1993) et Mitásová et Mitás (1993) desarrollaron un método de interpolación basado en el principio de la mínima curvatura con tensión que es independiente de la distribución espacial de los puntos de observación (grilla, puntos dispersos, isohipsas). Utiliza la estructura de cuadrícula usual para almacenar, manipular y visualizar los resultados de los análisis topográficos, todo esto alcanzando la calidad de las estimaciones hechas por el método de los *trapezoides* (ver 6.3.3). Su método es conocido bajo el nombre de *splines en tensión completamente regularizadas*. Fue elaborado para llenar las exigencias de los análisis topográficos cuando se trata de producir estimaciones fiables de la pendiente y de la curvatura del relieve (Mitásová et Hofierka, 1993:659). Con este método, las derivadas de todo orden son válidas, contrario a las soluciones tradicionales que son limitadas a aquella de segundo orden.

En el programa *Surfer*, el método de la mínima curvatura fue definido siguiendo el enfoque de Briggs (1974) et Smith et Wessel (1990). Por otra parte, los cálculos de las derivadas de terreno utilizan el enfoque sugerido por Mitásová et Hofierka, 1993 et Mitásová et Mitás, 1993.

Triangulación

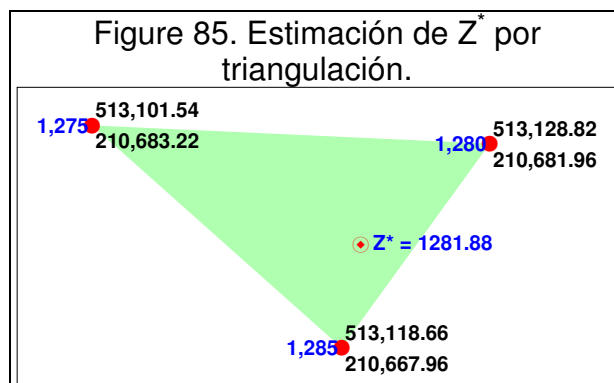
Este método de interpolación requiere primero la creación de la red triangular o RTI, tal como se presentó en la sección 6.3.2. Una vez que los triángulos de Delaunay han sido construidos, se describe la superficie interior del triángulo por una función lineal derivada de las altitudes de cada uno de los puntos de muestreo que constituyen los vértices del triángulo. Esta función permite calcular la altitud en cada punto del triángulo de manera que el valor Z^* estimado pueda ser transcrito tanto como un atributo en la base de datos de un programa que maneja las estructuras de datos vectoriales, o como la cota "Z" en la grilla regular de un programa que maneja las estructuras de datos matriciales (el programa *Surfer* por ejemplo. Formalmente:

$$Z^* = a + bx + cy \quad (8)$$

donde a , b , c son coeficientes a determinar mientras que x , y son las coordenadas cartesianas de abscisa y de ordenada.

En el ejemplo (fig. 85), Z^* fue obtenida solucionando el sistema de las tres ecuaciones lineales siguientes:

$$1275 = a + 513101.54b + 210683.22c \quad (9a)$$



$$1280 = a + 513128.82b + 210681.96c \quad (9b)$$

$$1285 = a + 513118.66b + 210667.96c \quad (9c)$$

reordenando 9a, se obtiene:

$$a = 1275 - 513101.54b - 210683.22c \quad (10)$$

reemplazando este valor **a** en la ecuación 9b, se obtiene:

$$1280 = (1275 - 513101.54b - 210683.22c) + 513128.82b + 210681.96c, \text{ o}$$

$$\mathbf{b = [(5 + 1.26c) / 27.28]} \quad (11)$$

y se puede reemplazar este valor **b** en la ecuación 10:

$$a = 1275 - 513101.54 \left(\frac{5+1.26c}{27.28} \right) - 210683.22c$$

$$\mathbf{a = -92768.53739 - 234382.1914c} \quad (12)$$

y ahora, se puede utilizar la ecuación 9c para calcular **c**

$$1285 = -92768.53739 - 234382.1914c + 513118.66 \left[\frac{5 + 1.26c}{27.28} \right]$$

$$+ 210667.96c$$

$$\mathbf{c = -0.4742591871}$$

reemplazando **c** en la ecuación 12, se obtiene:

$$a = -92768.53739 - 234382.1914 (-0.4742591871)$$

$$\mathbf{a = 18389.37021}$$

y reemplazando **c** en la ecuación 11, se obtiene **b**:

$$b = \left[\frac{5 + 1.26 (-0.4742591871)}{27.28} \right]$$

$$\mathbf{b = 0.1613795243}$$

Sea $Z_{(x,y)} = Z_{(513120,210675)}$, un punto al interior del triángulo (figura 85):

$$Z^* = 18389.37021 + 0.1613795243 (513120) + (-0.4742591871) (210675)$$

$$\mathbf{Z^* = 1281.877476.}$$

A diferencia del método de las medias móviles ponderadas, la triangulación de Delaunay va siempre a respetar el valor **Z** cuando la posición de un punto de

muestreo coincide con aquel de un nodo de grilla o *píxel* a interpolar. Es decir, $Z - Z^* = 0$, cuando las posiciones x_i y x_j coinciden. Esta propiedad es muy deseable en todo método de interpolación. Por el contrario, la interpolación por triangulación es incapaz de “predecir” la existencia de cimas o depresiones locales salvo aquellas descritas explícitamente en los datos medidos. Esta forma de “predicción” es otra propiedad deseable.

Con la triangulación de Delaunay, se puede tomar en cuenta los caracteres lineales (las *líneas estructurales*: ríos, líneas divisorias, líneas de escarpe) de la superficie original, ya sea agregando estas líneas encima de la red (opción disponible en la versión 3.0 del programa *ArcView*, así como en el programa *GWN-DTM* de *Intergraph*, entre otros) para, por consiguiente, redefinir la red (ver 6.3.2) o, menos eficazmente, agregando suficientes puntos a lo largo de tales ejes (única opción disponible en el programa *Surfer*) sin integración real de las líneas. Esto representa una ventaja considerable con relación a los métodos basados en una triangulación de Delaunay. Al contrario, este método se arriesga al alisar excesivamente la superficie cuando una ausencia local de datos obliga a crear triángulos muy grandes. Además, independientemente del tamaño del triángulo, la *varianza* interna es modelizada por una superficie lineal, lo que significa una sobre-simplificación de la realidad, incompatible con varios tipos de aplicación.

Krigeage (Kriging)

El método de interpolación por *Krigeage* o “*kriging*” es definido como “un método de interpolación por medias ponderadas donde el conjunto de los pesos asignados a los puntos de muestreo minimiza la varianza de estimación, que es calculada en función de un modelo de variograma y de los emplazamientos relativos de los puntos, unos con respecto a otros, así como con relación al punto de estimación” (Englund, 1988:xiv –traducción libre).

El *Krigeage* es en cierto sentido, un método de interpolación basado en el principio de las medias móviles (ver 6.4.1), pero es capaz de responder a ciertas consideraciones inaccesibles con los otros métodos: (a) ¿Cuál es el largo del radio de búsqueda?; (b) ¿Cuál forma y orientación debe haber para una interpolación óptima –isotropía versus anisotropía-?; (c) ¿Existe una manera óptima para estimar el *peso* que no sea una simple función de la distancia?; (d) ¿Cuál es el error (incertidumbre) asociado al valor interpolado? (Burrough, 1986:155).

El *Krigeage* es un método de interpolación local dicho óptimo, en el sentido en como utiliza la programación dinámica para escoger los pesos de interpolación de manera a obtener la *mejor estimación lineal insesgada* del valor de la variable en un punto cualquiera.

El método reposa sobre el principio que dice que la variación espacial de una propiedad (lo que se llama una variable regionalizada) es muy irregular para ser

modelizada por una simple función matemática, pero que puede ser descrita por una *superficie estocástica*. La interpolación debe pues, primeramente, explorar y seguidamente modelizar el aspecto estocástico de la variable regionalizada. La información que resulta es entonces utilizada para estimar los pesos de la función de interpolación.

La teoría de *las variables regionalizadas* (Matheron, 1971) asume que la variación espacial de una variable cualquiera puede ser obtenida por la adición de tres componentes mayores: (a) la componente *estructural*, expresada con un valor medio constante o con una tendencia constante; (b) una componente *aleatoria espacialmente correlacionada*; y (c) un *ruido aleatoria* o error residual. (Burrough, 1986:155). Los componentes (b) y (c) se presumen constantes en toda la zona de muestreo.

Sea \mathbf{x} la posición en 1, 2 ó 3 dimensiones, el valor de la variable regionalizada Z en \mathbf{x} es:

$$Z(\mathbf{x}) = m(\mathbf{x}) + \varepsilon'(\mathbf{x}) + \varepsilon'' \quad (13)$$

donde $m(\mathbf{x})$ es una función *determinista* que describe la componente *estructural* de Z en la posición \mathbf{x} , $\varepsilon'(\mathbf{x})$ es el término que denota los residuos de $m(\mathbf{x})$ que son de naturaleza *estocástica*, localmente variables y espacialmente correlacionadas y " ε'' " es un ruido residual, gaussiano, espacialmente independiente teniendo por media cero et varianza σ^2 (figura 86).

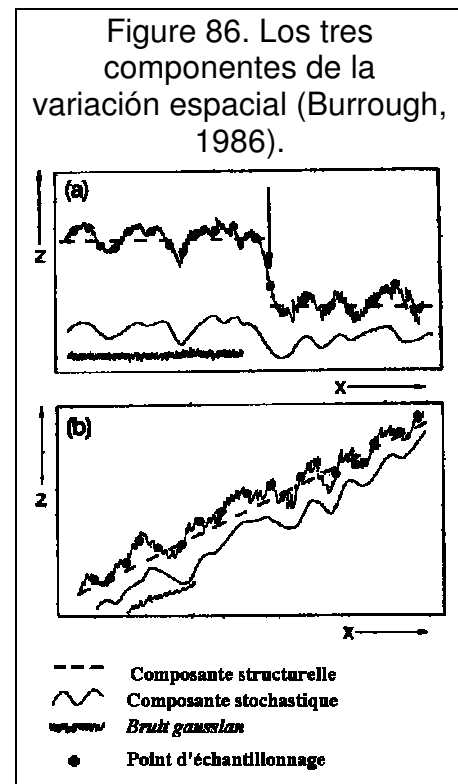
La primera etapa en el *Krigeage* consiste en escoger una función adecuada para el término $m(\mathbf{x})$. En el caso más simple, cuando no existe tendencia o "*deriva*" en los datos, $m(\mathbf{x})$ es igual al valor medio de la zona de muestreo. En este caso, la *diferencia media* o diferencia esperada entre dos posiciones cualquiera \mathbf{x} y $\mathbf{x}+\mathbf{h}$ separadas por un vector de distancia \mathbf{h} , será:

$$E[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})] = 0 \quad (14)$$

En tal caso, se puede asumir también que la *varianza de las diferencias* depende solamente de la distancia \mathbf{h} , entre los sitios, sea:

$$E\{[Z(\mathbf{x}) - Z(\mathbf{x}+\mathbf{h})]^2\} = E\{[\varepsilon'(\mathbf{x}) - \varepsilon'(\mathbf{x}+\mathbf{h})]^2\} = 2\gamma(\mathbf{h}) \quad (15)$$

donde $\gamma(\mathbf{h})$ es una función conocida bajo el nombre de *semi-varianza* (la mitad de la *varianza*).



Las condiciones establecidas por las ecuaciones (14) y (15) corresponden a la *hipótesis intrínseca* de la *teoría de las variables regionalizadas* (Burrough, 1986:156; Oliver et Webster, 1990:315). De acuerdo a esta, una vez que la componente estructural de los datos es eliminada, la variación restante es homogénea y las diferencias entre estos sitios están en función de la distancia que los separa. Si las dos condiciones especificadas en la hipótesis intrínseca son respetadas, la semivarianza puede ser establecida a partir de los puntos comprendidos en la muestra:

$$\gamma(\mathbf{h}) = 1/2 n \sum_{i=1}^n \{ Z_{(x_i)} - Z_{(x_i + h)} \}^2 \quad (16)$$

donde n es el número de pares de puntos separados por la distancia h . La distancia entre los puntos h , es también llamada el corrimiento ó "*lag*". Un gráfico de $\gamma(\mathbf{h})$ sobre \mathbf{h} es nombrado *semivariograma*. La construcción de este último constituye una etapa fundamental para establecer los *pesos* a utilizar al momento de la interpolación. (Burrough, 1986:156).

De la misma manera que el método del inverso de la distancia, el *Krigeage* requiere del cálculo de la suma ponderada de los puntos de muestreo en el vecindario del sitio a evaluar, sea:

$$Z^* = \sum_{i=1}^n w_i z_i \quad (17)$$

pero en el *Krigeage*, la suma de los pesos w_i debe ser igual a 1. Los pesos son calculados a partir de un conjunto de $n + 1$ de ecuaciones lineales simultáneas, donde n es el número de puntos utilizados para la estimación en una localización cualquiera. En forma matricial, las ecuaciones de los pesos son:

$$\mathbf{C} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{d}$$

que pueden ser distribuidas en:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdot & C_{1n} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdot & C_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \cdot & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ w_n \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ C_{n0} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

donde los términos en la matriz \mathbf{C} son los valores de las *covarianzas espaciales* entre los puntos de la muestra y los términos en \mathbf{d} son también de las covarianzas espaciales, pero entre los puntos de la muestra y el *punto a estimar*. La *covarianza espacial* es una medida de la *correlación espacial* o *autocorrelación*.

El término μ es un parámetro conocido como el *multiplicador de Lagrange*, un parámetro flexible utilizado para asegurarse que la suma de los pesos sea igual a 1. La ecuación (18) es resuelta premultiplicando los términos de los dos lados de la igualdad por el inverso de \mathbf{C} :

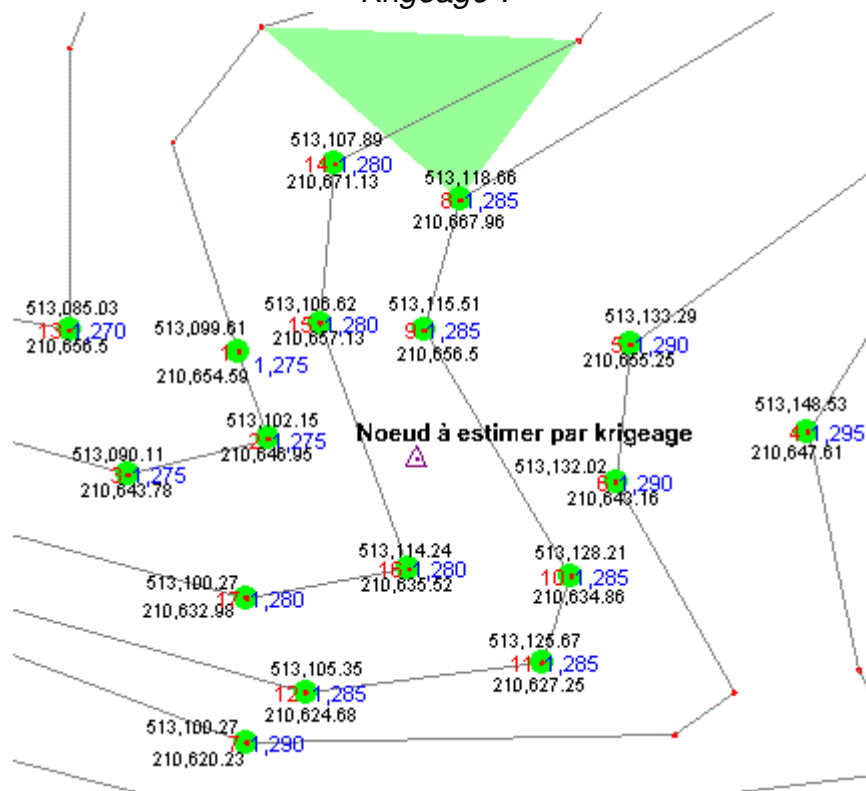
$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (19)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{d} \quad (20)$$

Para cada nodo que debe ser estimado al momento de la creación de la *grilla*, las matrices de las covarianzas \mathbf{C} y \mathbf{d} deben ser calculadas (tal como se describe aquí arriba) y la ecuación (20) resuelta para obtener los pesos. Estos son después aplicados en la ecuación (17) para calcular el valor estimado de la variable, es decir, la “altura” de la superficie modelizada en este punto en particular.

Para ilustrar el procedimiento de interpolación con el *Krigeage*, utilizaremos un subconjunto de datos ilustrados en la figura 87. La zona escogida para este ejemplo está situada justo al sur de aquella utilizada para explicar los tratamientos en modo RTI (figuras 85 y 87). Ocho puntos han sido retenidos (2, 5, 6, 9, 10, 15, 16 y 17); sus coordenadas son presentadas en la tabla 3.

Figura 87. Mapa de los puntos utilizados para la prueba d'interpolación con *Krigeage*².



² Para este ejemplo utilizamos el programa VarioWin (Pannatier, 1996) a fin de determinar el modelo de variograma requerido.

De acuerdo con la ecuación (5), el valor de altitud en cada nodo de la grilla es

Tabla 3. Datos de partida (ver fig. 89)

POIN	EST	NORD	ALTIT
2	513102.15	210646.95	1275
5	513133.29	210655.25	1290
6	513132.02	210643.16	1290
9	513115.51	210656.50	1285
10	513128.21	210634.86	1285
15	513106.62	210657.13	1280
16	513114.24	210635.52	1280
17	513100.27	210632.98	1280

estimado por la suma lineal de los valores de altitud observados en el vecindario (observaciones al interior del radio de búsqueda) multiplicado por su ponderación. Por lo tanto la tarea importante consiste en calcular los pesos de cada una de las observaciones. La primer etapa consiste en medir (o calcular) : a) las $\{n*(n-1)\}/2$ distancias medias entre todos los puntos del vecindario (tabla

4), lo que constituye los datos de base para calcular la matriz de las *covarianzas espaciales* (**C**) ; b) las "n" distancias entre el nodo de grilla a estimar y cada uno de los puntos incluidos en su vecindario (tabla 5), lo que permitirá el cálculo del vector de las *covarianzas espaciales* (**d**).

Para tener una idea en cuanto a la estructura de la variación espacial, se produce un semi-variograma, es decir un grafico que muestra la variación de la semi-varianza del atributo estudiado (la altitud en este caso) según

Tabla 4. Matriz de los n^2 distancias

	PT2	PT5	PT6	PT9	PT10	PT15	PT16	PT17
PT2	0.00	32.23	30.11	16.42	28.73	11.12	16.64	14.10
PT5	32.23	0.00	12.16	17.82	21.01	26.74	27.43	39.83
PT6	30.11	12.16	0.00	21.23	9.13	28.99	19.35	33.34
PT9	16.42	17.82	21.23	0.00	25.09	8.91	21.02	28.03
PT10	28.73	21.01	9.13	25.09	0.00	31.02	13.99	28.00
PT15	11.12	26.74	28.99	8.91	31.02	0.00	22.91	24.97
PT16	16.64	27.43	19.35	21.02	13.99	22.91	0.00	14.20
PT17	14.10	39.83	33.34	28.03	28.00	24.97	14.20	0.00

la distancia de separación entre los puntos muestreados en la zona de estudio. Los programas GeoEas o VarioWin podrían ser utilizados para cumplir con esta tarea, en la cual el trabajo consiste en establecer *clases* de distancia (o *lags*) y, por cada clase,

calcular el valor medio de las diferencias de altitud tomando en cuenta los pares de puntos muestreados correspondientes (ver la ecuación 4).

Se deben utilizar programas diseñados para el análisis *geoestadístico* no solamente para acelerar los cálculos, sino también por la posibilidad que ellos ofrecen para determinar cual modelo de variograma se ajusta mejor a los datos experimentales (lineal, gaussiano, exponencial, esférico, etc.) y cuales son los parámetros determinantes del variograma (efecto de pepita o ruido residual, umbral des techo o asíntota de la varianza, radio de influencia máxima de la autocorrelación espacial para la variable considerada. Para estimar la covarianza entre cada pareja de puntos conocidos y de aquellos con el nodo de grilla a interpolar, debe de referirse siempre a este

Tabla 5. Vector de las n distancias.

Punto	Distancia
2	13.00
5	20.97
6	17.12
9	11.51
10	16.65
15	14.74
16	9.51
17	19.01

modelo de variograma, que describe la estructura regional de la varianza. La figura 88 presenta los tres semi-variogramas experimentales anidados utilizados en el ejemplo desarrollado³. Resaltamos la importancia de utilizar muchos semi-variogramas direccionales simultáneamente cuando los datos muestran una fuerte anisotropía.

Para este ejemplo, hemos escogido el modelo gaussiano, aunque no se pueda determinar el techo para la varianza puesto que la pequeña dimensión de la zona de ensayo (300 x 300 metros). Los parámetros importantes del variograma fueron: ruido (*pepita*), $\epsilon'' = 0$; techo (para el dominio de interpolación de interés) o factor de escala, $c = 3000$, y umbral de autocorrelación = 358. El modelo *gausiano* utiliza la función siguiente (Pannatier, 1996:50):

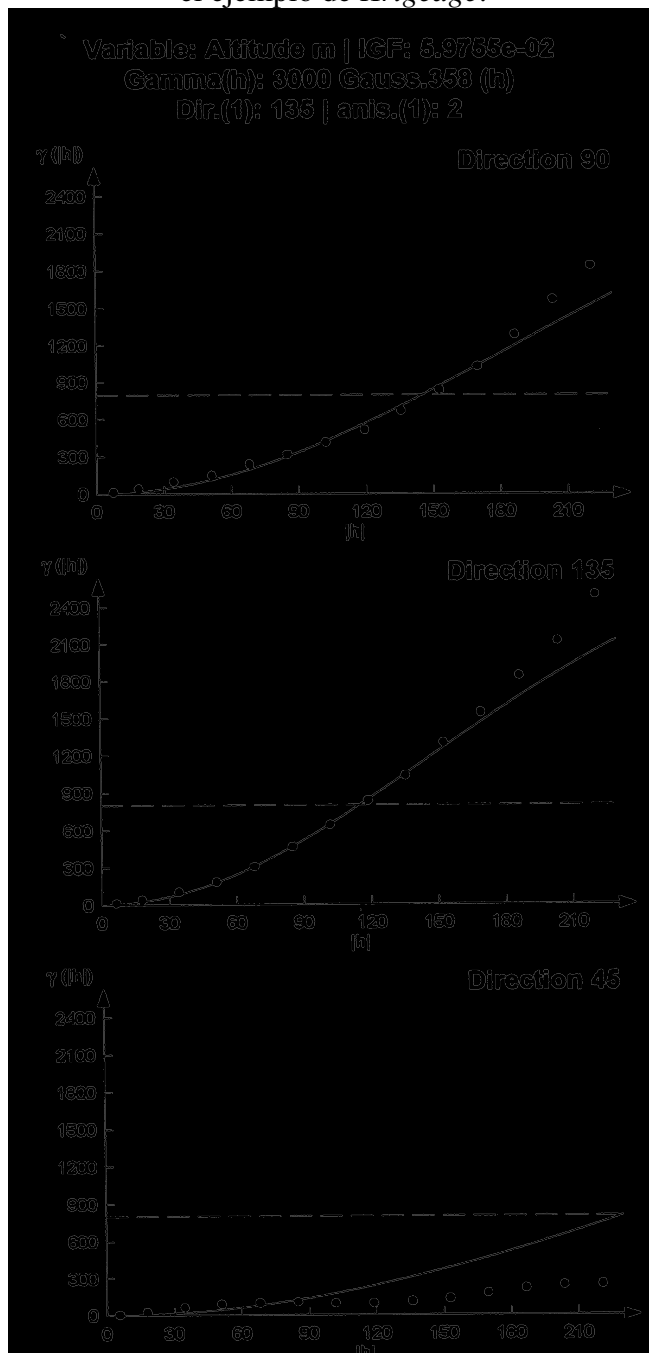
$$\gamma_{(h)} = c \left(1 - e^{-\frac{3h^2}{a^2}}\right) \quad (21)$$

donde "h" es la distancia particular de cada pareja de puntos en la cual se quiere estimar la covarianza espacial.

Mientras que el variograma fijado caracteriza la estructura regional de la varianza, es decir la componente estructural $m(x)$ de la ecuación 13, se debe analizar la covarianza local (alrededor del nodo a interpolar), lo que permite de evaluar $\epsilon'(x)$ (la variación local espacialmente correlacionada) de la ecuación 13.

Es la matriz de estas covarianzas lo que permitirá finalmente estimar los valores de altitud. Para nuestra zona de ensayo y

Figure 88. Semi-variogramme experimental para e el ejemplo de *Krigeage*.



³ Para la aplicación en el conjunto de la zona experimental colón, *zexpcolo*, referida más adelante, hemos tenido la ocasión de mejorar el ajuste deficiente mostrado en la dirección nor-este (figura 116).

para el nodo escogido, las covarianzas son calculadas remplazando la variable « h » en la ecuación 21 por la distancia que separa cada pareja de puntos tomados de las tablas 5 o 6. Sea:

$$\gamma_{(2,5)} = 3000 \left(1 - e^{-\frac{(3 \cdot 32.23^2)}{358^2}}\right) = \mathbf{72.053} \quad (\text{para la pareja Pt2 et Pt5}).$$

La matriz de las *covarianzas espaciales* \mathbf{C} así calculadas es presentada en la tabla 6 y de acuerdo a la ecuación 20, se necesita calcular su *inverso* \mathbf{C}^{-1} (tabla 7), tarea para la cual se puede utilizar una hoja de cálculo.

	PT2	PT5	PT6	PT9	PT10	PT15	PT16	PT17	
PT2	0.00	72.0530050	62.9916782	18.8788089	57.3978772	8.66789211	19.3756683	13.9204892	1
PT5	72.05	0.00	10.3596270	22.2263141	30.8476618	49.7790798	52.3573885	109.349446	1
PT6	62.99	10.3596270	0.00	31.4715158	5.85127347	58.4328912	26.1832662	77.0590614	1
PT9	18.88	22.2263141	31.4715158	0.00	43.8865011	5.57252320	30.8625905	54.6522034	1
PT10	57.40	30.8476618	5.85127347	43.8865011	0.00	66.8047176	13.7038855	54.5646441	1
PT15	8.67	49.7790798	58.4328912	5.57252320	66.8047176	0.0	36.6451439	43.46890	1
PT16	19.38	52.3573885	26.1832662	30.8625905	13.7038855	36.6451439	0.00	14.1243848	1
PT17	13.92	109.349446	77.0590614	54.6522034	54.5646441	43.468906	14.1243848	0.00	1
	1	1	1	1	1	1	1	1	0

	PT2	PT5	PT6	PT9	PT10	PT15	PT16	PT17	
PT2	-380.40	-135.00	471.62	-253.83	-426.19	400.72	244.49	78.59	-30.07
PT5	-135.00	-150.95	233.28	126.09	-107.70	12.73	-84.37	105.91	32.93
PT6	471.62	233.28	-640.03	190.50	515.71	-422.10	-205.79	-143.19	-49.73
PT9	-253.83	126.09	190.50	-641.92	-391.27	551.40	536.37	-117.34	-46.95
PT10	-426.19	-107.70	515.71	-391.27	-514.74	512.21	362.49	49.48	53.89
PT15	400.72	12.73	-422.10	551.40	512.21	-593.29	-480.87	19.21	54.32
PT16	244.49	-84.37	-205.79	536.37	362.49	-480.87	-458.03	85.70	-40.92
PT17	78.59	105.91	-143.19	-117.34	49.48	19.21	85.70	-78.35	27.52
	-30.07	32.93	-49.73	-46.95	53.89	54.32	-40.92	27.52	-1508.34

Siguiendo el mismo procedimiento, se calcula la matriz (o vector) correspondiente a las *covarianzas espaciales* del nodo considerado (tabla 8). Sea :

$$\gamma_{(\text{Noeud1,pt2})} = 3000 \left(1 - e^{-\frac{(3 \cdot 13.00^2)}{358^2}}\right) = \mathbf{11.8389}$$

(para la pareja Nodo1 y Pt2).

Entonces, se utiliza la ecuación 20 ($\mathbf{w} = \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{d}$) para obtener el vector de los pesos particulares de cada uno de los ocho puntos conocidos para estimar la altitud (tabla 9). Esta operación se hace también en una hoja electrónica.

POINT	NOEUD1
PT2	11.8389187994359
PT5	30.7106107268941
PT6	20.5094080757392
PT9	9.29077792889754
PT10	19.4112991466981
PT15	15.2248957271335
PT16	6.344768334693
PT17	25.2750907337089
	1.00

Y finalmente, se calculan las altitudes utilizando la ecuación 17. Sea :

$$\begin{aligned} Z^* &= \sum (w_i z_i) \text{ (para los ocho puntos)} \\ Z^*_{Pt2} &= (0.4185971*1275 - 0.2073843*1290 + \\ &\quad 0.4577092*1290 + 0.6377952*1285 \\ &\quad - 0.3575355*1285 - 0.4079914*1280 + \\ &\quad 0.6530373*1280 - 0.1942274*1280) \\ Z^*_{Pt2} &= \mathbf{1281.8116} \end{aligned}$$

Además, se puede evaluar *a priori* el margen de error de la estimación utilizando el multiplicador de *Lagrange* (u) de la tabla 9. Según :

Tabla 9. Vector de los pesos relativos w	
POINT	NOEUD 1
PT2	0.4185971
PT5	-0.2073843
PT6	0.4577092
PT9	0.6377952
PT10	-0.3575355
PT15	-0.4079914
PT16	0.6530373
PT17	-0.1942274

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\text{noeud}} &= u + \sum (w_i d_i) \text{ (para los ocho puntos considerados)} \\ \text{Var}_{\text{noeud}} &= 0.0178105 + (0.4185971*11.8389188 - \\ &\quad 0.2073843*30.7106107 - 0.4577092*20.5094081 + \\ &\quad 0.6377952*9.2907779 - 0.3575355*19.4112991 - \\ &\quad 0.4079914*15.2248957 + 0.6530373*6.3447683 - \\ &\quad 0.1942274*25.2750907) \\ \text{Var}_{\text{noeud}} &= 7.5 \times 10^{-6} \text{ metros.} \end{aligned}$$

De acuerdo con la figura 87, el valor de altitud estimado $Z^* = 1281.8116$ parece correcto. Pero, para tener una imagen más completa (fig. 89), hemos realizado el *Krigeage* utilizando el programa SURFER (el mismo modelo de variograma y los mismos parámetros). Hemos hallado:

$$Z^*_{\text{surfer}} = 1282.47$$

La diferencia (0.66 m) resulta del hecho que la interpolación con Surfer no estaba restringida a utilizar los ocho puntos que escogimos y que la función *gausiana* en *Surfer* está definida de manera diferente de aquella definida por Pannatier (ecuación 21). En *Surfer* :

$$\gamma_{(h)} = c (1 - e^{-h^2})$$

Un semi-variograma, siempre gaussiano, pero mucho mejor ajustado a los datos de la zona de ensayo descrita (zexpcolo), es discutida más adelante (ver 6.6.5.2), pero el valor Z^* estimado permaneció básicamente igual : $Z^* = 1281.8141$.